МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ, МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИЙ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

МОО ВО Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

УТВЕРЖДАЮ

Директор
(должность)
Лоцев Г.В
(ФИО)
3 сентября____2026 г.

Численные методы в прикладной механике

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **Высшая школа Природопользования, мехатроники и транспорта**

Учебный план Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"

Квалификация **бакалавр**
Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **7 ЗЕТ**
Часов по учебному плану 252
в том числе:
аудиторные занятия 104
самостоятельная работа 113,9

Виды контроля в семестрах:
зачет 6
экзамен 7

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**6 (3.2)**		**7 (4.1)**		Итого	
Недель	16		18			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП	УП	РП
Лекции	18	18	16	16	34	34
Практические	36	36	34	34	70	70
Контактная работа в период теоретического обучения	0,1	0,1	2	2	2,1	2,1
Контактная работа в период экзаменационной сессии			0,3	0,3	0,3	0,3
В том числе инт.	2	2	2	2	4	4
В том числе в форме практ.подготовки	2	2	2	2	4	4
Итого ауд.	54	54	50	50	104	104
Контактная работа	54,1	54,1	52,3	52,3	106,4	106,4
Сам. работа	53,9	53,9	60	60	113,9	113,9
Часы на контроль			31,7	31,7	31,7	31,7
Итого	108	108	144	144	252	252

Программу составил(и):
к.ф.-м.н., Аширбаев Бейшембек Ыбышевич

к.ф.-м.н., Комарцов Никита Михайлович

Рецензент(ы):
к.т.н., Джаманкулов Азамат Кенешбекович

д.т.н., Муслимов Аннас Поясович

Согласовано РОП:
к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич

Рабочая программа дисциплины
Численные методы в прикладной механике

разработана в соответствии с ФГОС 3++:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика (приказ Минобрнауки России от 09.08.2021 г. № 729)

составлена на основании учебного плана:

Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"

утвержденного учёным советом вуза от 26.06.2026 протокол № 11.

Рабочая программа одобрена на заседании **Высшей школы Природопользования, мехатроники и транспорта**

Протокол от 02.09.2026 г. № 1
Срок действия программы: 2026-2032 уч.г.
Руководитель подразделения: Алсеитов Мирлан Тилегенович

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ
к рабочей программе дисциплины (модуля)

Численные методы в прикладной механике

№ п/п	Основание внесения изменения	Раздел/ пункт	Содержание изменения
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	формирование у студентов системных знаний и практических навыков применения численных методов для решения задач механики деформируемого твердого тела, движения и взаимодействия механических систем. Дисциплина направлена на освоение методов построения математических моделей механических объектов и процессов, их численного решения и анализа полученных результатов. Особое внимание уделяется применению современных вычислительных технологий, включая метод конечных элементов, для исследования напряжённо-деформированного состояния, перемещений, устойчивости и динамики механических конструкций. В результате освоения дисциплины студент должен приобрести способность самостоятельно ставить и решать вычислительные задачи прикладной механики, оценивать достоверность результатов и использовать их для принятия инженерных решений.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.В.1.ДВ.03
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	Б1.О.15. Физика
2.1.2	Б1.О.19. Теоретическая механика
2.1.3	Б1.О.20. Сопротивление материалов
2.1.4	Б1.О.26. Аналитическая механика
2.1.5	Б1.О.23. Вариационное исчисление
2.1.6	Б1.О.24. Уравнения математической физики
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Б1.В.1.ДВ.03.01. Численные методы в прикладной механике
2.2.2	Б1.В.1.ДВ.04.01. Экспериментальная механика деформируемого твердого тела
2.2.3	Б1.В.1.05. Планирование эксперимента и методы обработки данных
2.2.4	Б1.В.1.07. Компьютерный инжиниринг
2.2.5	Б3.О.02. Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена
2.2.6	Б2.О.02(Пд). Преддипломная практика
2.2.7	Б3.О.03. Подготовка к процедуре защиты и защита выпускной квалификационной работы
2.2.8	Б1.В.1.06. Метод конечных элементов
2.2.9	Б1.В.1.03. Основы автоматизированного проектирования

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
ПК-2: Готовностью выполнять научно-исследовательские работы в области прикладной механики с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий, широко распространённых в промышленности систем мирового уровня и экспериментального оборудования для проведения механических испытаний	
Знать:	
Уровень 1	Знать: □ Основные направления и специфику выполнения расчетно-экспериментальных работ с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий в области прикладной механики.
Уровень 2	
Уровень 3	
Уметь:	
Уровень 1	Уметь: □ Выполнять расчетно-экспериментальные работы в области прикладной механики с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий
Уровень 2	
Уровень 3	
Владеть:	
Уровень 1	Владеть: □ методами проведения расчетно-экспериментальных работ в области прикладной механики с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий
Уровень 2	

Уровень 3	

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	основные понятия, методы и задачи вычислительной механики;
3.1.2	принципы построения математических и численных моделей механических систем;
3.1.3	основные численные методы решения задач механики;
3.1.4	основы метода конечных элементов и области его применения;
3.1.5	методы расчёта напряжений, деформаций, перемещений, устойчивости и динамических характеристик конструкций;
3.1.6	методы оценки точности, сходимости и достоверности численных результато
3.2	**Уметь:**
3.2.1	формулировать расчетную задачу и выбирать адекватную математическую модель механического объекта;
3.2.2	выбирать численный метод и обосновывать его применение для решения инженерной задачи;
3.2.3	создавать расчетные модели механических конструкций и задавать граничные условия и нагрузки;
3.2.4	выполнять численные расчеты напряжённо-деформированного состояния, устойчивости и динамики конструкций;
3.2.5	анализировать и визуализировать результаты вычислений;
3.2.6	оценивать погрешность и достоверность полученных результатов и формулировать инженерные выводы.
3.3	**Владеть:**
3.3.1	методами математического и численного моделирования механических объектов и процессов;
3.3.2	навыками применения метода конечных элементов при решении задач прикладной механики;
3.3.3	навыками работы с современными программными комплексами вычислительной механики;
3.3.4	методами анализа и интерпретации результатов численного моделирования;
3.3.5	навыками верификации и оценки достоверности расчетных моделей и результатов вычислений.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетен-ции	Литература	Инте ракт.	Пр. подг.	Примечание
	Раздел 1. Численные алгоритмы и надежность вычислений							
1.1	Численная модель механической системы и достоверность расчета Переход от физической постановки к уравнениям, граничным условиям и дискретной модели на примере деформируемого тела. Погрешности исходных данных, модели, дискретизации, итерационного решения и округления; их раздельная оценка. Обусловленность задачи, устойчивость алгоритма и сходимость приближений; различие этих понятий. Абсолютные и относительные нормы ошибки и невязки; влияние масштаба переменных и единиц измерения. Проверка вычислительного решения на аналитическом примере и при сгущении сетки; верификация и сопоставление с экспериментом. /Лек/	6	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			

1.2	Погрешность и обусловленность численного решения. Сравнить ошибку и невязку на двух линейных системах, изменить исходные данные и объяснить чувствительность решения. /Пр/	6	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
1.3	Нелинейные алгебраические уравнения в задачах равновесия Выделение корня и проверка существования решения на заданном интервале; метод бисекции. Методы секущих и хорд с фиксированным концом; различие алгоритмов и условия применения. Метод Ньютона и локальная сходимость; выбор начального приближения и причины отказов. Метод простой итерации и условие сжатия; геометрическая интерпретация сходимости. Сочетание Ньютона с сохранением интервала; остановка по невязке и изменению решения на примере нелинейной пружины. /Лек/	6	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
1.4	Расчет равновесия нелинейной пружины. Реализовать бисекцию и метод Ньютона, сопоставить число итераций и проверить остаток уравнения. /Пр/	6	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
1.5	Прямые методы решения систем линейных уравнений Возникновение СЛАУ при дискретизации механической задачи; плотные, ленточные и разреженные матрицы. Исключение Гаусса с частичным выбором главного элемента; предотвращение деления на малый ведущий элемент. LU-разложение и повторное решение для нескольких правых частей; метод Холецкого для симметричной положительно определенной матрицы. Число обусловленности и влияние возмущения нагрузки на вычисленные перемещения. Контроль невязки; ограничения формул Крамера и явного обращения матрицы в инженерном расчете. /Лек/	6	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			

1.6	Прямое решение СЛАУ и повторные нагрузки. Выполнить исключение Гаусса с выбором главного элемента; использовать разложение для двух правых частей. /Пр/	6	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
1.7	Итерационные методы решения разреженных систем Методы Якоби и Гаусса — Зейделя; итерационная матрица и спектральный радиус. Диагональное преобладание как достаточное условие сходимости; сравнение с необходимым и достаточным условием для стационарной итерации. Метод последовательной верхней релаксации SOR; роль параметра релаксации и ограничения его выбора. Метод сопряженных градиентов для симметричных положительно определенных систем; назначение предобусловливания без вывода алгоритма. Относительная невязка, предельное число итераций и журнал сходимости; разреженное хранение и повторяемость вычислений. /Лек/	6	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
1.8	Итерационное решение разреженной системы. Сравнить Якоби, Зейделя и SOR; построить график невязки. Сопряженные градиенты использовать как библиотечный контроль для подходящей матрицы. /Пр/	6	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
1.9	Классификация погрешностей и расчет чувствительности к данным. Сравнение алгоритмов поиска корня. LU разложение и обусловленность СЛАУ. Условия сходимости стационарных итераций. /Ср/	6	24	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
	Раздел 2. Метод конечных разностей в механике							

2.1	Конечно разностная аппроксимация краевых задач Вывод односторонних и центральных разностей из формулы Тейлора; порядок аппроксимации. Первые, вторые и смешанные производные на прямоугольной сетке; влияние шага по каждой координате. Пятиточечная аппроксимация уравнений Лапласа и Пуассона; построение системы узловых уравнений. Граничные условия Дирихле и Неймана; фиктивные узлы и согласование порядка на границе. Условия совместности чистой задачи Неймана и неоднозначность с точностью до константы; проверка на известном решении. /Лек/	6	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
2.2	Разностное решение задачи Пуассона. Собрать пятиточечную схему с условиями Дирихле; сравнить с известным гладким решением на двух сетках. /Пр/	6	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
2.3	Кручение призматического бруса методом конечных разностей Предпосылки кручения Сен-Венана для однородного изотропного бруса; функция напряжений Прандтля. Уравнение Пуассона для функции напряжений и нулевое граничное значение на односвязном сечении. Дискретизация квадратного и прямоугольного сечений; использование симметрии и условия на осях симметрии. Восстановление касательных напряжений из производных функции напряжений; интегральное определение крутящего момента. Проверка размерностей, знаков, крутильной жесткости и сеточной сходимости; ограничения восстановления напряжений у углов. /Лек/	6	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
2.4	Кручение прямоугольного бруса. Найти функцию Прандтля, касательные напряжения и крутящий момент; проверить симметрию и размерности. /Пр/	6	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			

2.5	Изгиб тонких пластин методом конечных разностей Гипотезы Кирхгофа — Лява для однородной изотропной пластины постоянной толщины; цилиндрическая жесткость. Бигармоническое уравнение прогиба и смысл поперечной распределенной нагрузки. Разностный шаблон бигармонического оператора на равномерной квадратной сетке. Две граничные связи на каждой стороне: жесткое защемление и шарнирное опирание; учет фиктивных узлов. Восстановление изгибающих моментов, симметрия прогиба и проверка сеточной сходимости на прямоугольной пластине. /Лек/	6	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
2.6	Изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины. Реализовать разностную модель на основе двух уравнений Пуассона для специального случая шарнирного опирания прямых сторон; сравнить прогиб с точным тестом. /Пр/	6	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
2.7	Геометрия сетки и проверка конечно разностного расчета Регулярные треугольные решетки с шестью равноудаленными соседями; аппроксимация лапласиана и сравнение с квадратной сеткой. Криволинейная граница и геометрическая погрешность ступенчатого представления сечения. Сопоставление решений на трех вложенных сетках; наблюдаемый порядок сходимости и условия оценки Ричардсона. Разделение алгебраической и сеточной погрешности; согласование допуска решателя с точностью дискретизации. Сравнение затрат памяти, числа неизвестных и времени; обоснование выбора МКР для задачи кручения или изгиба. /Лек/	6	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
2.8	Исследование сеточной сходимости МКР. Выполнить расчеты на трех вложенных сетках, оценить порядок и отделить сеточную погрешность от погрешности решателя. /Пр/	6	8	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1	2	2	Командная работа

2.9	Построение разностных формул и учет границ. Расчётное графическое задание по кручению. Изгиб пластины и условия на прямых сторонах. Сеточная сходимость. /Ср/	6	29,9	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
2.10	Консультации и прием зачета /КрТО/	6	0,1	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
	Раздел 3. Дифференциальные и нелинейные задачи							
3.1	Задача Коши для дифференциальных уравнений механики Приведение уравнения движения второго порядка к системе первого порядка; начальные условия и масштаб времени. Метод Тейлора и последовательные приближения Пикара как подходы к локальному построению решения. Явный метод Эйлера и классический метод Рунге — Кутты четвертого порядка; локальная и глобальная погрешности. Устойчивость на тестовом уравнении; отличие уменьшения погрешности от устойчивости шага. Адаптивное изменение шага и контроль энергии на примере свободных и затухающих колебаний. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
3.2	Численное интегрирование колебаний. Сравнить Эйлера и RK4 для линейного осциллятора; исследовать шаг, фазовую ошибку и поведение энергии. /Пр/	7	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			

3.3	Краевые и нелинейные дифференциальные задачи Отличие краевой задачи от задачи Коши; метод стрельбы для линейной двухточечной задачи. Разностная дискретизация нелинейной краевой задачи и построение системы невязок. Линеаризация Ньютона и матрица Якоби дискретной системы; численное дифференцирование и проверка производных. Демпфирование шага Ньютона и простая итерация; контроль сходимости на примере нелинейного упругого основания. Обзор неявного шага по времени и возникновения нелинейной системы; отличие итерационного допуска от шага дискретизации. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
3.4	Численное интегрирование колебаний. Сравнить Эйлера и RK4 для линейного осциллятора; исследовать шаг, фазовую ошибку и поведение энергии /Пр/	7	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1	2	2	Мозговой штурм
3.5	Нелинейная краевая задача. Собрать разностную систему для стержня на нелинейном основании; решить демпфированным методом Ньютона и проверить Якобиан. /Пр/	7	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
3.6	Колебательная система и выбор шага времени. Нелинейная система и проверка Якобиана. /Ср/	7	14	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
	Раздел 4. Метод конечных элементов в плоской упругости							

4.1	Вариационная постановка и построение метода конечных элементов Сильная и слабая формы одномерной краевой задачи; интегрирование по частям. Существенные и естественные граничные условия; допустимые и пробные функции. Метод Галеркина и кусочно линейный базис; локальная матрица жесткости стержневого элемента. Локальная и глобальная нумерация степеней свободы; сборка матрицы и вектора нагрузки. Исключение закрепленных степеней свободы и вычисление реакций; энергетическая интерпретация решения. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
4.2	Стержневая система методом конечных элементов. Получить матрицы двух элементов, собрать систему и вычислить перемещения и реакции. /Пр/	7	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
4.3	Плоская задача линейной упругости Равновесие, соотношения деформация — перемещения и закон Гука в двумерной постановке. Плоское напряженное и плоское деформированное состояния; условия выбора модели. Векторы перемещений, напряжений и деформаций с инженерной сдвиговой деформацией; согласование матричной записи. Матрицы упругости изотропного материала для двух плоских состояний; смысл модуля Юнга и коэффициента Пуассона. Виртуальная работа внутренних и внешних сил; толщина модели и размерности узловых нагрузок. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
4.4	Две плоские модели упругого тела. Составить матрицы упругости для плоского напряженного и деформированного состояний; сравнить напряжения при заданной деформации. /Пр/	7	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			

4.5	Линейный треугольный конечный элемент Локальная интерполяция двух перемещений через три узла; функции формы линейного треугольника. Площадь и ориентация элемента; матрица производных функций формы. Построение матрицы деформаций B при инженерной сдвиговой деформации; постоянство деформаций в элементе. Вычисление матрицы жесткости через B и матрицу упругости; симметрия и собственные движения жесткого тела. Восстановление напряжений и влияние качества треугольника; проверка воспроизведения линейного поля. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
4.6	Матрица жесткости линейного треугольника. Вычислить функции формы, B и жесткость заданного элемента; проверить жесткие перемещения и линейное поле. /Пр/	7	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
4.7	Сборка и проверка конечно элементной модели Таблица связности и сборка системы плоской задачи; разреженная структура матрицы. Распределенная нагрузка и согласованный узловой вектор; учет толщины. Закрепления, исключение движений жесткого тела и причины вырожденности системы. Решение для перемещений, вычисление реакций и проверка общего равновесия. Проверка постоянной деформации, сгущение сетки и различие сходимости перемещений и напряжений; сингулярности у углов и точечных нагрузок. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
4.8	Плоская упругая задача на сетке треугольников. Собрать модель прямоугольной полосы, задать закрепления и нагрузку; проверить реакции, деформации и сходимость. /Пр/	7	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			

4.9	Вариационная постановка стержневой задачи. Матрицы упругости для двух плоских состояний. Линейный треугольник и линейное поле перемещений. Расчетное графическое задание плоской упругой задачи. /Ср/	7	31	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
	Раздел 5. Граничные методы и выбор расчетной технологии							
5.1	Граничные интегральные уравнения и метод граничных элементов Фундаментальное решение уравнения Лапласа и идея интегрального представления решения. Переход к уравнению на границе; граничные значения функции и нормальной производной. Разбиение границы на элементы и метод коллокации; общий вид системы без полного вывода коэффициентов. Особые интегралы и свободный член на гладкой границе и в угловой точке; обзор численного вычисления. Преимущества для однородных линейных и внешних задач, плотность матрицы и ограничения для неоднородных задач; сравнение с МКР и МКЭ. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
5.2	Сопоставление двух численных моделей. Для единой задачи Пуассона сравнить МКР и скалярный МКЭ по контрольным значениям, ошибкам и числу неизвестных; оформить паспорт расчета. /Пр/	7	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			

5.3	Выбор метода и воспроизводимый инженерный расчет Выбор МКР, МКЭ или МГЭ по геометрии, типу уравнений, граничным условиям и требуемой величине. Разделение геометрической, физической и вычислительной моделей; фиксация ограничений применимости. Проверка на эталоне, равновесие, энергетические соотношения и исследование сеточной сходимости. Паспорт расчета: исходные данные, единицы, сетка, алгоритм, допуски, версии программ и воспроизводимый файл. Сопоставление напряжений и перемещений в контрольных точках; представление погрешности и обоснованного инженерного вывода. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
5.4	Граничные неизвестные в задаче Лапласаю На предоставленном учебном шаблоне исследовать коллокационную модель простой области; сравнить с известным решением и описать плотность матрицы /Пр/	7	4	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
5.5	Сравнение граничного и объемного подходов. Краткое обоснование области применимости МГЭ /Ср/	7	15	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
5.6	Консультации и прием экзамена /КрЭк/	7	0,3	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			
5.7	консультации в течении семестра /КрТО/	7	2	ПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1			

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

5 1 Вопросы для текущего контроля
В1. Чем отличаются ошибка математической модели, дискретизации и решения линейной системы?
В2. Почему малая невязка не всегда означает малую ошибку решения?
В3. Как влияет масштабирование переменных на интерпретацию относительных допусков?
В4. Какие условия обеспечивают существование корня и сходимость бисекции?
В5. Чем метод секущих отличается от метода хорд с фиксированным концом?
В6. Когда метод Ньютона теряет квадратичную сходимость и как ограничить его шаг?
В7. Зачем в исключении Гаусса выбирать главный элемент?
В8. Когда LU разложение можно повторно использовать для новой нагрузки?
В9. Какие свойства матрицы требуются методу Холецкого?
В10. Как определяются итерационные формулы Якоби и Зейделя?
В11. Как связан спектральный радиус итерационной матрицы со сходимостью?
В12. Для каких матриц допустим стандартный метод сопряженных градиентов?
В13. Как из ряда Тейлора получить центральную разность второй производной?
В14. Как вводятся условия Неймана и почему важен порядок граничной аппроксимации?
В15. Что требуется для разрешимости чистой задачи Неймана?

В16. Как получается пятиточечная схема уравнения Пуассона?
В17. Каков физический смысл функции напряжений Прандтля?
В18. Как по функции Прандтля вычисляются напряжения и крутящий момент?
В19. Какие условия задаются на оси симметрии при расчете кручения?
В20. Какие две граничные связи нужны при изгибе пластины?
В21. Чем шарнирное опирание прямой стороны отличается от защемления?
В22. Как оценить наблюдаемый порядок по трем сеткам?
В23. В каких случаях сгущение сетки не улучшает результат?
В24. Почему напряжения могут сходиться медленнее перемещений?
В25. Как преобразуется уравнение колебаний в систему первого порядка?
В26. Чем локальная погрешность шага отличается от глобальной погрешности интегрирования?
В27. Почему явный Эйлер непригоден для длительного расчета незатухающих колебаний с постоянным шагом?
В28. Какова роль шага в устойчивости и точности метода Рунге — Кутты?
В29. В чем заключается метод стрельбы и как проявляется его чувствительность?
В30. Как строится Якобиан дискретной нелинейной краевой задачи?
В31. Какие условия называются существенными и естественными в слабой постановке?
В32. Как связаны слабая форма задачи и метод Галеркина?
В33. Как выбирается плоское напряженное или плоское деформированное состояние?
В34. Почему в матрице B нужно согласовать инженерную сдвиговую деформацию с матрицей упругости?
В35. Какие свойства имеют функции формы линейного треугольника?
В36. Почему матрица жесткости отдельного свободного треугольника вырождена?
В37. Как вычисляются узловые реакции после исключения закрепленных степеней свободы?
В38. Что проверяет тест постоянной деформации и чего он не доказывает?
В39. Почему в МГЭ снижается размерность дискретизации, но возникает плотная матрица?
В40. Какие проверки и исходные данные должны входить в паспорт инженерного расчета?

5 2 Вопросы для промежуточной аттестации

Зачет в семестре 6: В1–В24; экзамен в семестре 7: В25–В40. На экзамене вопросы В1–В24 могут использоваться для уточнения выбора решателя и оценки ошибки в задаче, но не подменяют проверку содержания второго семестра.

5 3 Расчетные задания и ориентиры проверки

Задания З1–З4 относятся к шестому семестру, З5–З8 — к седьмому. Числа и параметры являются учебными данными. Формулировки допускают решение вручную на малой системе и последующую компьютерную проверку.

З1 Нелинейная пружина

При силе 3 Н закон силы пружины имеет вид $F(u) = u + u^3$, где численное значение u задано в мм и коэффициенты согласованы с этими единицами. Найти равновесие на [0; 2] мм бисекцией и методом Ньютона до абсолютной невязки 10^{-6} Н. Для Ньютона начать с 1 мм. Сравнить критерии остановки.

Контроль: $u \approx 1{,}213411663$ мм. Производная положительна на всем интервале, корень единственный. Представить историю итераций и невязку.

З2 Прямой и итерационный методы

Решить СЛАУ методом Гаусса и методом Зейделя из нулевого приближения до относительной невязки 10^{-6}. Объяснить достаточное условие сходимости.

$4x - y = 2$; $-x + 4y - z = 4$; $-y + 3z = 7$

Контроль: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; диагональное преобладание строгое. Невязку вычислять по исходной, а не преобразованной системе.

З3 Узловое уравнение Пуассона

На единичном квадрате решить $-\Delta u = 4$ при $u = 0$ на границе, шаг $h = 0{,}5$. Записать уравнение единственного внутреннего узла. Объяснить, почему это только грубое сеточное приближение.

Контроль: $4u = 4h^2$, поэтому $u(0{,}5;\ 0{,}5) = 0{,}25$. Это не объявляется точным решением непрерывной задачи.

З4 Изгиб шарнирно опертой пластины

В безразмерных координатах единичного квадрата задана жесткость $D = 1$ и нагрузка $q = 4\pi^4 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Задать условия шарнирного опирания прямых сторон, проверить точное решение и наметить разностный алгоритм через два уравнения Пуассона.

Контроль: $w = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, максимальный прогиб 1 в центре. Для этой геометрии и гладкого решения допустимы $w = 0$ и $\Delta w = 0$ на границе. Общие условия шарнирного опирания на произвольной кривой этим не заменяются.

З5 Устойчивость шага и колебания

Для $u'' + u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ построить систему первого порядка. Выполнить один шаг явного Эйлера с $h = 0{,}1$, вычислить энергию и объяснить поведение при длительном интегрировании.

Контроль: $u_1 = 1$, $v_1 = -0{,}1$, $E_0 = 0{,}5$, $E_1 = 0{,}505$. Энергия Эйлера на каждом шаге умножается на $1 + h^2$; эталон — $u = \cos(t)$, $v = -\sin(t)$.

З6 Нелинейная краевая задача

На [0; 1] решить $-u'' + u^3 = f(x)$, $u(0) = u(1) = 0$, где $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x) + \sin^3(\pi x)$. Составить разностную невязку и Якобиан, описать шаг Ньютона и проверить решение на двух сетках.

Контроль: точное решение $u = \sin(\pi x)$. В Якобиане диагональ $2/h^2 + 3u_i^2$, соседние диагонали $-1/h^2$. При достаточно точном решении систем ожидается второй порядок для гладкого решения.

З7 Стержень из двух конечных элементов

Стержень длиной 2 м закреплен слева, справа приложена осевая сила 1000 Н. Осевые жесткости одинаковых по длине элементов: $EA = 10^6$ Н. Найти перемещения трех узлов, реакцию и продольные силы.

Контроль: $u_0 = 0$, $u_1 = 0{,}001$ м, $u_2 = 0{,}002$ м; реакция слева -1000 Н; в обоих элементах растягивающая сила 1000 Н.

З8 Линейный треугольник

Заданы узлы (0;0), (1;0), (0;1) м и перемещения u = 0,001x, v = −0,0003y. Для плоского напряженного состояния E = 200 ГПа, ν = 0,3 найти функции формы, постоянные деформации и напряжения. Пояснить проверку жесткого перемещения.
Контроль: $N_1 = 1 - x - y$, $N_2 = x$, $N_3 = y$; $\varepsilon_x = 0{,}001$, $\varepsilon_y = -0{,}0003$, $\gamma_{xy} = 0$; $\sigma_x = 200$ МПа, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$. При одинаковом переносе всех узлов деформации равны нулю.
5 4 Тестовые задания
Выбрать один правильный ответ. Т1–Т5 используются в зачете, Т6–Т10 — в экзамене. Каждое задание оценивается в 1 балл; при текущей диагностике баллы в рейтинг не добавляются.
Т1. Каков порядок центральной разности второй производной на равномерной сетке для достаточно гладкой функции?
А первый; Б второй; В третий.
Т2. Что гарантирует сходимость бисекции для непрерывной функции с разными знаками на концах интервала?
А сохранение интервала с корнем; Б положительность производной; В положительная определенность.
Т3. Зачем контролируют обусловленность СЛАУ?
А для определения единиц длины; Б для выбора цвета графика; В для оценки чувствительности решения.
Т4. Какое условие требуется стандартному методу сопряженных градиентов?
А произвольная прямоугольная матрица; Б симметричная положительно определенная матрица; В нулевая диагональ.
Т5. Что задается на оси симметрии четной гладкой функции Прандтля?
А нулевая нормальная производная; Б обязательно нулевое значение функции; В заданный прогиб пластины.
Т6. Какова глобальная точность классического RK4 для гладкой задачи при устойчивом выборе шага?
А $O(h)$; Б $O(h^2)$; В $O(h^4)$.
Т7. Какие граничные условия в слабой форме называют существенными?
А предписанные перемещения; Б заданные поверхностные силы; В только свободные края.
Т8. Как распределены деформации в линейном треугольнике при линейной кинематике?
А квадратично; Б постоянны внутри элемента; В всегда равны нулю.
Т9. Почему система свободного упругого тела вырождена?
А из-за наличия движений жесткого тела; Б из-за выбора единиц СИ; В потому что любая матрица жесткости нулевая.
Т10. Какова типичная особенность классического МГЭ для линейной однородной задачи?
А объемная сетка обязательна и матрица диагональная; Б сетка только по времени; В дискретизируется граница и матрица обычно плотная.

5.2. Темы курсовых работ (проектов)

курсовых работ не предусмотрено

5.3. Фонд оценочных средств

Состав и порядок текущего контроля
В каждом семестре выполняются 8 практических работ, одно РГЗ и одна контрольная работа. Устные вопросы и диагностика используются при выполнении работ и отдельно не увеличивают максимальную сумму. Один и тот же результат не оценивается повторно как дополнительное задание.
Средство Семестр 6 Семестр 7 Максимум за семестр
Практические работы ПР 1–8 ПР 9–16 8 × 5 = 40
РГЗ и защита РГЗ 1 РГЗ 2 10
Контрольная работа КР 1 КР 2 10
Промежуточная аттестация Зачет Экзамен 40
Итого 100 100 100
Практические работы сдаются после завершения соответствующей темы, РГЗ — до промежуточной аттестации; календарные даты устанавливает преподаватель в начале семестра. Исправленная работа оценивается по тем же содержательным критериям. Штрафы за опоздания и активность в предложенную шкалу не включены.
6 3 Критерии практической работы
Каждая работа — до 5 баллов: корректная постановка и данные — 1; работающий алгоритм или последовательность вычислений — 1; правильный результат и единицы — 1; независимая проверка — 1; объяснение решения при защите — 1. По каждому критерию допускаются 0, 0,5 или 1 балл.
0 — результат отсутствует либо принципиально неверен; 0,5 — выполнен частично и исправляется после уточнения; 1 — выполнен корректно и обоснован. Файл без воспроизводимого расчета не подтверждает критерий алгоритма; итоговое число без проверки не подтверждает критерий верификации.
6 4 Контрольные работы
КР 1 после лекции 8: задачи З2 и З3. КР 2 после лекции 14: задачи З5 и З8. Продолжительность каждой — 90 минут; разрешен непрограммируемый калькулятор. Компьютерная проверка допускается после сдачи письменного решения и не заменяет его.
Каждая задача — 5 баллов: постановка и уравнения — 1; корректный алгоритм — 2; вычисления — 1; проверка и интерпретация — 1. Ошибка в исходном числе не обнуляет корректно выполненные независимые этапы. Ориентиры ответов приведены в разделе 5.3.
6 5 Расчетно графические задания
РГЗ 1 Кручение прямоугольного бруса
Для индивидуального варианта n от 1 до 20 задать $a = 0{,}02 + 0{,}001n$ м, $b = 1{,}5a$, $G = 80$ ГПа, интенсивность закручивания $\theta = 0{,}01$ рад/м. Область сечения: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$. Решить задачу функции напряжений с нулевым значением на границе.
$-\Delta\varphi = 2G\theta$; $\tau_{xz} = \partial\varphi/\partial y$; $\tau_{yz} = -\partial\varphi/\partial x$; $T = 2\iint \varphi \, dA$
Использовать вложенные прямоугольные сетки с числом интервалов (8,12), (16,24), (32,48). Найти крутящий момент и напряжения в одинаковых физических контрольных точках; сравнить жесткость T/θ. Не подменять исследование сходимости сравнением максимумов в разных узлах.
Проверки: симметрия функции, знак положительного крутящего момента, размерности φ в Н/м, напряжений в Па и T в

Н·м; относительная невязка не выше 10^{-8} либо доказанное отсутствие влияния итерационного допуска на вывод о сетке. Проверить реализацию на круглом сечении с известной функцией либо отдельным гладким тестом Пуассона; при использовании теста он не считается эталоном прямоугольного сечения.
Представить постановку, схему сетки, описание граничных условий, алгоритм, файл вычислений, таблицу трех сеток, поля функции и напряжений, вывод о точности. Защита: объяснить отличие невязки от погрешности и восстановить одну компоненту напряжений.
РГЗ 2 Плоская упругая полоса
Для варианта n: длина L = 0,20 + 0,005n м, высота H = 0,10 м, толщина t = 0,005 м, E = 200 ГПа, ν = 0,3. Плоское напряженное состояние; на правом торце равномерная растягивающая нагрузка p = (1 + 0,05n) МПа; верхняя и нижняя стороны свободны. На левой стороне задать только u = 0; в нижнем левом углу дополнительно v = 0. Это закрепление допускает однородное поперечное сжатие и исключает жесткие движения.
Построить сетки прямоугольных ячеек 4 × 2, 8 × 4, 16 × 8 с разбиением каждой ячейки на два линейных треугольника. Собрать матрицу, согласованный вектор нагрузки, решить систему, восстановить деформации, напряжения и реакции. Отдельно проверить случай жесткого переноса на одном элементе.
$u = px/E$; $v = -\nu py/E$; $\sigma_x = p$; $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$; $R_x = -pHt$
Точное решение воспроизводится линейным треугольником с точностью округления и решателя; выраженного снижения ошибки при сгущении здесь может не быть. Этот тест проверяет сборку и воспроизведение линейного поля, а не порядок сходимости на неоднородном поле.
Для исследования сеточной сходимости выполнить второй расчет той же полосы: слева задать u = v = 0 по всей стороне, справа приложить равномерную касательную нагрузку q = p/10 по вертикали. Сравнить среднее вертикальное перемещение правого торца и энергию на трех сетках. В точках углов закрепления не использовать пиковые напряжения как критерий сходимости. Проверить баланс вертикальных сил и моментов.
Представить постановки двух тестов, сетки, таблицы сравнения, файл расчета, баланс сил и моментов, графики перемещений и вывод о роли закреплений. Защита: объяснить матрицу B, выбор плоского состояния и причину вырожденности незакрепленной модели.
Оценивание каждого РГЗ
Критерий Баллы
Постановка, единицы и граничные условия 0–2
Корректность и воспроизводимость алгоритма 0–2
Тестирование и проверка равновесия или интегральных характеристик 0–2
Сравнение сеток и обоснованный вывод о точности 0–2
Отчет и самостоятельное объяснение на защите 0–2
2 балла — критерий выполнен полностью; 1 — частично, с исправимыми пробелами; 0 — отсутствует либо принципиально неверен. Условие принятия РГЗ — не менее 6 из 10, при этом по алгоритму и проверке результата не должно быть нулевых баллов. Доработка допускается.
6 6 Зачет и экзамен
Формат обеих аттестаций: два теоретических вопроса, одна расчетная задача и пять тестовых вопросов. Подготовка — 60 минут; ответ и уточняющие вопросы — до 15 минут. Разрешен непрограммируемый калькулятор; для больших сеточных задач оцениваются вывод схемы и алгоритм, а не полный компьютерный расчет на месте.
Теоретический вопрос — до 10 баллов: корректность понятий — 0–3; раскрытие метода и условий применимости — 0–4; аргументированный пример или проверка — 0–3. Расчетная задача — до 15: постановка — 0–3; алгоритм — 0–5; вычисления или корректная дискретная система — 0–4; проверка и вывод — 0–3. Тесты — до 5 баллов. Всего 40.
Комплект билетов к зачету
Билет Теория Задача Тесты
1 В2 и В13 З1 Т1–Т5
2 В7 и В17 З2 Т1–Т5
3 В11 и В20 З3 Т1–Т5
4 В18 и В22 З4 Т1–Т5
Комплект экзаменационных билетов
Билет Теория Задача Тесты
1 В26 и В33 З5 Т6–Т10
2 В29 и В35 З6 Т6–Т10
3 В31 и В39 З7 Т6–Т10
4 В37 и В40 З8 Т6–Т10
Билеты — минимальный готовый комплект; весь банк вопросов раздела 5.1 является перечнем для подготовки. При расширении комплекта сохраняются охват семестра, сложность задач и единые критерии. Использование одинакового набора тестов предполагает одновременное письменное выполнение.

5. 1 Вопросы для текущего контроля
В1. Чем отличаются ошибка математической модели, дискретизации и решения линейной системы?
В2. Почему малая невязка не всегда означает малую ошибку решения?
В3. Как влияет масштабирование переменных на интерпретацию относительных допусков?
В4. Какие условия обеспечивают существование корня и сходимость бисекции?
В5. Чем метод секущих отличается от метода хорд с фиксированным концом?
В6. Когда метод Ньютона теряет квадратичную сходимость и как ограничить его шаг?
В7. Зачем в исключении Гаусса выбирать главный элемент?
В8. Когда LU разложение можно повторно использовать для новой нагрузки?
В9. Какие свойства матрицы требуются методу Холецкого?

В10. Как определяются итерационные формулы Якоби и Зейделя?
В11. Как связан спектральный радиус итерационной матрицы со сходимостью?
В12. Для каких матриц допустим стандартный метод сопряженных градиентов?
В13. Как из ряда Тейлора получить центральную разность второй производной?
В14. Как вводятся условия Неймана и почему важен порядок граничной аппроксимации?
В15. Что требуется для разрешимости чистой задачи Неймана?
В16. Как получается пятиточечная схема уравнения Пуассона?
В17. Каков физический смысл функции напряжений Прандтля?
В18. Как по функции Прандтля вычисляются напряжения и крутящий момент?
В19. Какие условия задаются на оси симметрии при расчете кручения?
В20. Какие две граничные связи нужны при изгибе пластины?
В21. Чем шарнирное опирание прямой стороны отличается от защемления?
В22. Как оценить наблюдаемый порядок по трем сеткам?
В23. В каких случаях сгущение сетки не улучшает результат?
В24. Почему напряжения могут сходиться медленнее перемещений?
В25. Как преобразуется уравнение колебаний в систему первого порядка?
В26. Чем локальная погрешность шага отличается от глобальной погрешности интегрирования?
В27. Почему явный Эйлер непригоден для длительного расчета незатухающих колебаний с постоянным шагом?
В28. Какова роль шага в устойчивости и точности метода Рунге — Кутты?
В29. В чем заключается метод стрельбы и как проявляется его чувствительность?
В30. Как строится Якобиан дискретной нелинейной краевой задачи?
В31. Какие условия называются существенными и естественными в слабой постановке?
В32. Как связаны слабая форма задачи и метод Галеркина?
В33. Как выбирается плоское напряженное или плоское деформированное состояние?
В34. Почему в матрице B нужно согласовать инженерную сдвиговую деформацию с матрицей упругости?
В35. Какие свойства имеют функции формы линейного треугольника?
В36. Почему матрица жесткости отдельного свободного треугольника вырождена?
В37. Как вычисляются узловые реакции после исключения закрепленных степеней свободы?
В38. Что проверяет тест постоянной деформации и чего он не доказывает?
В39. Почему в МГЭ снижается размерность дискретизации, но возникает плотная матрица?
В40. Какие проверки и исходные данные должны входить в паспорт инженерного расчета?

5 2 Вопросы для промежуточной аттестации

Зачет в семестре 6: В1–В24; экзамен в семестре 7: В25–В40. На экзамене вопросы В1–В24 могут использоваться для уточнения выбора решателя и оценки ошибки в задаче, но не подменяют проверку содержания второго семестра.

5 3 Расчетные задания и ориентиры проверки

Задания З1–З4 относятся к шестому семестру, З5–З8 — к седьмому. Числа и параметры являются учебными данными. Формулировки допускают решение вручную на малой системе и последующую компьютерную проверку.

З1 Нелинейная пружина

При силе 3 Н закон силы пружины имеет вид $F(u) = u + u^3$, где численное значение u задано в мм и коэффициенты согласованы с этими единицами. Найти равновесие на [0; 2] мм бисекцией и методом Ньютона до абсолютной невязки 10^{-6} Н. Для Ньютона начать с 1 мм. Сравнить критерии остановки.

Контроль: $u \approx 1{,}213411663$ мм. Производная положительна на всем интервале, корень единственный. Представить историю итераций и невязку.

З2 Прямой и итерационный методы

Решить СЛАУ методом Гаусса и методом Зейделя из нулевого приближения до относительной невязки 10^{-6}. Объяснить достаточное условие сходимости.

$4x - y = 2; \quad -x + 4y - z = 4; \quad -y + 3z = 7$

Контроль: x = 1, y = 2, z = 3; диагональное преобладание строгое. Невязку вычислять по исходной, а не преобразованной системе.

З3 Узловое уравнение Пуассона

На единичном квадрате решить $-\Delta u = 4$ при u = 0 на границе, шаг h = 0,5. Записать уравнение единственного внутреннего узла. Объяснить, почему это только грубое сеточное приближение.

Контроль: $4u = 4h^2$, поэтому $u(0{,}5; 0{,}5) = 0{,}25$. Это не объявляется точным решением непрерывной задачи.

З4 Изгиб шарнирно опертой пластины

В безразмерных координатах единичного квадрата задана жесткость D = 1 и нагрузка $q = 4\pi^4 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Задать условия шарнирного опирания прямых сторон, проверить точное решение и наметить разностный алгоритм через два уравнения Пуассона.

Контроль: $w = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, максимальный прогиб 1 в центре. Для этой геометрии и гладкого решения допустимы w = 0 и $\Delta w = 0$ на границе. Общие условия шарнирного опирания на произвольной кривой этим не заменяются.

З5 Устойчивость шага и колебания

Для $u'' + u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ построить систему первого порядка. Выполнить один шаг явного Эйлера с h = 0,1, вычислить энергию и объяснить поведение при длительном интегрировании.

Контроль: $u_1 = 1$, $v_1 = -0{,}1$, $E_0 = 0{,}5$, $E_1 = 0{,}505$. Энергия Эйлера на каждом шаге умножается на $1 + h^2$; эталон — $u = \cos(t)$, $v = -\sin(t)$.

З6 Нелинейная краевая задача

На [0; 1] решить $-u'' + u^3 = f(x)$, $u(0) = u(1) = 0$, где $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x) + \sin^3(\pi x)$. Составить разностную невязку и Якобиан, описать шаг Ньютона и проверить решение на двух сетках.

Контроль: точное решение $u = \sin(\pi x)$. В Якобиане диагональ $2/h^2 + 3u_i^2$, соседние диагонали $-1/h^2$. При достаточно точном

решении систем ожидается второй порядок для гладкого решения.
37 Стержень из двух конечных элементов
Стержень длиной 2 м закреплен слева, справа приложена осевая сила 1000 Н. Осевые жесткости одинаковых по длине элементов: $EA = 10^6$ Н. Найти перемещения трех узлов, реакцию и продольные силы.
Контроль: $u_0 = 0$, $u_1 = 0{,}001$ м, $u_2 = 0{,}002$ м; реакция слева -1000 Н; в обоих элементах растягивающая сила 1000 Н.
38 Линейный треугольник
Заданы узлы (0;0), (1;0), (0;1) м и перемещения $u = 0{,}001x$, $v = -0{,}0003y$. Для плоского напряженного состояния $E = 200$ ГПа, $\nu = 0{,}3$ найти функции формы, постоянные деформации и напряжения. Пояснить проверку жесткого перемещения.
Контроль: $N_1 = 1 - x - y$, $N_2 = x$, $N_3 = y$; $\varepsilon_x = 0{,}001$, $\varepsilon_y = -0{,}0003$, $\gamma_{xy} = 0$; $\sigma_x = 200$ МПа, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$. При одинаковом переносе всех узлов деформации равны нулю.
5 4 Тестовые задания
Выбрать один правильный ответ. Т1–Т5 используются в зачете, Т6–Т10 — в экзамене. Каждое задание оценивается в 1 балл; при текущей диагностике баллы в рейтинг не добавляются.
Т1. Каков порядок центральной разности второй производной на равномерной сетке для достаточно гладкой функции?
А первый; Б второй; В третий.
Т2. Что гарантирует сходимость бисекции для непрерывной функции с разными знаками на концах интервала?
А сохранение интервала с корнем; Б положительность производной; В положительная определенность.
Т3. Зачем контролируют обусловленность СЛАУ?
А для определения единиц длины; Б для выбора цвета графика; В для оценки чувствительности решения.
Т4. Какое условие требуется стандартному методу сопряженных градиентов?
А произвольная прямоугольная матрица; Б симметричная положительно определенная матрица; В нулевая диагональ.
Т5. Что задается на оси симметрии четной гладкой функции Прандтля?
А нулевая нормальная производная; Б обязательно нулевое значение функции; В заданный прогиб пластины.
Т6. Какова глобальная точность классического RK4 для гладкой задачи при устойчивом выборе шага?
А $O(h)$; Б $O(h^2)$; В $O(h^4)$.
Т7. Какие граничные условия в слабой форме называют существенными?
А предписанные перемещения; Б заданные поверхностные силы; В только свободные края.
Т8. Как распределены деформации в линейном треугольнике при линейной кинематике?
А квадратично; Б постоянны внутри элемента; В всегда равны нулю.
Т9. Почему система свободного упругого тела вырождена?
А из-за наличия движений жесткого тела; Б из-за выбора единиц СИ; В потому что любая матрица жесткости нулевая.
Т10. Какова типичная особенность классического МГЭ для линейной однородной задачи?
А объемная сетка обязательна и матрица диагональная; Б сетка только по времени; В дискретизируется граница и матрица обычно плотная.

5.4. Перечень видов оценочных средств

Устный опрос. Проверка понимания предпосылок метода, граничных условий и причин численной ошибки.
Диагностический тест. Краткая проверка терминов и условий применимости алгоритмов; используется для обратной связи.
Отчет и защита практической работы. Расчетный файл, проверка результата и ответы на вопросы по алгоритму.
Контрольная работа. Индивидуальное решение двух задач с объяснением хода вычислений; одна работа в каждом семестре.
Расчетно графическое задание. Индивидуальный компьютерный расчет механической задачи, исследование точности и защита;
Зачет. Итоговая проверка лекций 1–8: теория, расчетная задача и пять коротких вопросов.
Экзамен. Проверка лекций 9–16 с использованием ранее освоенных алгоритмов решения систем; теория, задача и пять коротких вопросов.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Самарский А.А., Гулин А.В.	Численные методы: учебное пособие для вузов	М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1989
Л1.2	Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.	Численные методы: учебник	М.: БИНОМ. Лаборатория знаний 2015

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л2.1	Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.	Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие	М.: БИНОМ. Лаборатория знаний 2015

6.1.3. Методические разработки

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л3.1	Скляр С.Н., Козлов П.В.	Численные методы: лабораторный практикум (материалы для самостоятельной работы)	Бишкек: Изд-во КРСУ 2008

6.3. Перечень информационных и образовательных технологий	
6.3.1 Компетентностно-ориентированные образовательные технологии	
6.3.1.1	Python с NumPy SciPy и Matplotlib
6.3.1.2	Реализация алгоритмов, плотные и разреженные СЛАУ, нелинейные уравнения, интегрирование ОДУ, графики и исследование сходимости. Открытый программный стек.
6.3.1.3	https://scipy.org/ ; https://docs.scipy.org/doc/scipy/
6.3.1.4	GNU Octave
6.3.1.5	Матричные вычисления, реализация МКР и учебного МКЭ, построение графиков. Свободная альтернатива для многих учебных MATLAB сценариев; совместимость конкретного кода проверяется.
6.3.1.6	https://octave.org/
6.3.1.7	MATLAB
6.3.1.8	Матричные и разреженные вычисления, численные алгоритмы и визуализация. Коммерческая среда; дополнительные пакеты использовать только при наличии соответствующей лицензии.
6.3.1.9	https://www.mathworks.com/products/matlab.html
6.3.1.10	PTC Mathcad Prime
6.3.1.11	Инженерные расчетные документы с формулами, единицами и графиками; учебные решения уравнений и СЛАУ. Не считать ограниченную версию Express эквивалентом полной лицензии.
6.3.1.12	https://www.ptc.com/en/products/mathcad
6.3.2 Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения	
6.3.2.1	Math Net Ru
6.3.2.2	Математическая база публикаций и журнальных архивов для поиска работ по вычислительной математике, дифференциальным уравнениям и механике.
6.3.2.3	https://www.mathnet.ru/
6.3.2.4	NIST Digital Library of Mathematical Functions
6.3.2.5	Справочная система по специальным функциям и математическим формулам; используется для аналитических эталонов и проверки вычислений.
6.3.2.6	https://dlmf.nist.gov/
6.3.2.7	Netlib
6.3.2.8	Репозиторий численных библиотек и алгоритмических материалов, включая линейную алгебру и итерационные методы.
6.3.2.9	https://www.netlib.org/
6.3.2.10	Документация SciPy
6.3.2.11	Справочная система по численным алгоритмам и интерфейсам решателей; использовать для проверки условий применимости функций и критериев остановки.
6.3.2.12	https://docs.scipy.org/doc/scipy/
6.3.2.13	Документация MATLAB
6.3.2.14	Справочная система разработчика по матричным операциям, решению систем, интегрированию ОДУ и средствам проверки вычислений.
6.3.2.15	https://www.mathworks.com/help/matlab/
6.3.2.16	Эти ресурсы различаются по назначению: Math-Net.Ru — публикационная база, Netlib — репозиторий алгоритмов, DLMF и документация разработчиков — справочные системы. Доступ к отдельным полным текстам и программным продуктам может зависеть от условий соответствующего ресурса.

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

1 Подготовка к занятиям
До начала курса повторите операции с матрицами, производные нескольких переменных, уравнения равновесия, закон Гука и граничные условия. В выбранной среде научитесь задавать массивы, решать СЛАУ, строить графики и сохранять воспроизводимые расчетные файлы. Для освоения курса достаточно одной основной вычислительной среды; установка всех перечисленных программ не требуется.

Перед лекцией прочитайте ее вопросы и выпишите незнакомые обозначения. В конспекте раздельно фиксируйте физические предпосылки, уравнения, дискретные формулы и условия применимости алгоритма. После лекции восстановите один ключевой вывод без подглядывания и сформулируйте, чем проверяется правильность результата.

2 Выполнение практической работы

• Запишите, что требуется найти. Укажите геометрию, нагрузки, свойства материала, единицы и ограничения модели.

• До запуска программы составьте уравнения и граничные условия. Для сеточной задачи нарисуйте узлы и нумерацию неизвестных.

• Проверьте реализацию на малом примере, где решение можно получить вручную. Сопоставьте хотя бы одну строку матрицы с узловым уравнением.

• Для прямого решателя вычислите невязку исходной системы; для итерационного задайте абсолютный или относительный допуск и максимальное число итераций.

• Выполните независимую проверку: точное решение, баланс сил и моментов, симметрия, энергетическое соотношение либо сгущение сетки.

• Сохраните расчетный файл, результаты и краткое объяснение. На защите покажите, где задаются данные, как выбирается метод и чем подтверждена точность.

3 Самостоятельная работа и отчет

Планируйте самостоятельную работу по разделу 3: сначала повторение и малый проверочный пример, затем основная задача, проверка и оформление. Если вычисления не сходятся, сохраните исходный файл, данные и журнал ошибки; меняйте по одному параметру. Это позволяет установить причину, а не получить случайно подходящий результат.

Отчет по практической работе содержит название и номер; постановку и данные; метод и формулы; схему или сетку; результаты с единицами; проверку; вывод. Для РГЗ дополнительно необходимы исследование сеток и описание точности. Изображение экрана не заменяет расчетный файл и пояснение алгоритма.

В файле вычислений отделяйте ввод данных, построение модели, решение, проверку и вывод результатов. Укажите среду, версию, используемые библиотеки и команду запуска. Сохраняйте исходные данные вместе с работой; избегайте абсолютных путей к личным папкам и ручного изменения результатов после расчета.

4 Проверка численного результата

Не приравнивайте малую невязку к высокой физической точности. Сначала проверьте модель и закрепления, затем качество сетки и алгоритма. Для плохо обусловленной системы даже малая невязка может сопровождаться заметной ошибкой решения. Допуск решателя выбирайте достаточно строгим, чтобы он не определял наблюдаемое изменение результата при сгущении сетки.

Сравнивайте значения в одних и тех же физических точках или сопоставимые интегральные характеристики. Не оценивайте сходимость по пиковым напряжениям в точках приложения сосредоточенной силы и у идеализированного острого закрепления без анализа сингулярности. Наблюдаемый порядок по трем сеткам имеет смысл после выхода в асимптотический режим и при одинаковой постановке.

При подготовке треугольного элемента проверьте ориентацию и площадь, согласование порядка узлов, компонент перемещений и сдвиговой деформации. До основного расчета выполните проверку жесткого переноса и линейного поля. Если матрица системы вырождена, сначала проверьте закрепления и связность сетки.

5 Подготовка к зачету и экзамену

Готовьтесь по диапазонам вопросов раздела 5.2 и задачам раздела 5.3. На каждый теоретический вопрос дайте определение, запишите ключевой алгоритм, укажите ограничения и приведите способ проверки. Решение задачи начинайте с постановки; итоговое число обязательно сопровождайте единицами и объяснением его смысла.

До аттестации проверьте, что все практические работы и РГЗ приняты. Критерии и баллы приведены в разделе 6. Для пробного ответа используйте один билет и ограничьте время подготовки 60 минутами; затем проверьте себя по ориентирам и объясните допущенные ошибки.

6 Самостоятельность и использование программных средств

Библиотечные решатели используйте осознанно: укажите решаемую систему, свойства матрицы и допуски. Сравните хотя бы один библиотечный результат с самостоятельно реализованным алгоритмом или точным тестом. При использовании чужого фрагмента кода или справочного вывода приведите источник и поясните адаптацию. Любой автоматически подготовленный код или текст нужно проверить; ответственность за постановку и выводы остается у автора работы.